HUBUNGAN ANTARA DAERAH IDEAL UTAMA, DAERAH FAKTORISASI TUNGGAL, DAN DAERAH DEDEKIND

Eka Susilowati
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas PGRI Adibuana Surabaya
eka250@gmail.com

Abstrak

Setiap daerah ideal utama merupakan daerah faktorisasi tunggal, namun tidak berlaku sebaliknya. Setiap daerah ideal utama merupakan daerah Dedekind, namun sebaliknya tidak berlaku. Sedangkan setiap daerah Dedekind bukan merupakan daerah faktorisasi tunggal, begitu pula tidak berlaku sebaliknya.

Hubungan ekuivalensi antara daerah ideal utama dan daerah faktorisasi tunggal dapat berlaku jika diberikan syarat cukup pada daerah faktorisasi tunggal. Syarat cukup yang diberikan pada daerah faktorisasi tunggal adalah daerah faktorisasi tunggal tersebut merupakan daerah Dedekind. Selanjutnya, hubungan ekuivalensi daerah ideal utama dan daerah Dedekind dapat berlaku jika diberikan pula syarat cukup pada daerah Dedekind. Jika D merupakan daerah Dedekind maka D juga merupakan daerah faktorisasi tunggal jika diberikan pula syarat cukup pada daerah Dedekind D.

Kata kunci: *daerah Dedekind, daerah faktorisasi tunggal, daerah ideal utama, gelanggang bilangan bulat.*

1. PENDAHULUAN

Para matematikawan di abad ke 19 mengarah ke pertanyaan jika sifat ketunggalan faktorisasi yang berlaku untuk himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ apakah juga dapat berlaku untuk struktur himpunan yang lebih umum, yaitu gelanggang bilangan bulat O_K dalam lapangan bilangan aljabar K. Pada tahun 1844, Kummer menunjukkan bahwa hal itu tidak berlaku secara umum. Selama tiga tahun, Kummer meneliti bahwa faktorisasi dalam gelanggang bilangan bulat mungkin berlaku, jika merupakan elemen dari ideal pada gelanggang bilangan bulat, yang disebut bilangan ideal (ideal number). Penelitian Kummer disederhanakan dan dilanjutkan oleh Dedekind. Dedekind menemukan konsep ideal dalam gelanggang. Pada tahun 1871, Richard Dedekind (1831-1936) membuktikan bahwa dalam gelanggang bilangan bulat, setiap ideal sejati taknol dapat difaktorkan secara tunggal sebagai hasil kali ideal prima. Apabila diabstraksi, gelanggang bilangan bulat merupakan daerah integral. Daerah integral dengan sifat ini dikenal dengan daerah Dedekind. Dalam penelitian selanjutnya yang dilakukan Emmy Noether, menemukan beberapa aksioma untuk gelanggang yang dipenuhi oleh gelanggang bilangan bulat dari lapangan bilangan aljabar. Hal tersebut selanjutnya mengarah pada karateristik daerah Dedekind. Emmy Noether (1882 - 1935) menunjukkan bahwa karakteristik daerah Dedekind yaitu memenuhi Aksioma Noether , yaitu :

1. Setiap ideal dibangun secara berhingga.
2. Setiap ideal prima tak nol merupakan ideal maksimal.
3. Daerah integral bersifat tertutup secara integral.

Karakteristik daerah Dedekind yang dikemukan Emmy Noether yang nantinya digunakan sebagai definisi daerah Dedekind. Karakteristik yang dimaksud di sini bahwa daerah Dedekind memiliki sifat daerah integral yang merupakan gelanggang Noetherian, tertutup secara integral dalam lapangan hasil baginya, dan ideal prima tak nol di dalamnya merupakan ideal maksimal.

Dalam perkembangan selanjutnya, para peneliti menemukan bahwa karakteristik daerah Dedekind juga dimiliki daerah ideal utama. Penelitian sebelumnya telah dibuktikan bahwa ada hubungan searah bahwa daerah ideal utama merupakan daerah Dedekind, namun bagaimana sebaliknya. Hal ini membangkitkan keingintahuan para peneliti mengenai hubungan ekuivalensi daerah ideal utama dan daerah Dedekind.

Pada penelitian sebelumnya, telah diuraikan hubungan daerah ideal utama dan daerah faktorisasi tunggal. Dari hal tersebut, perlu diperhatikan kembali salah satu peta jalan penelitian yang diusulkan adalah mengenai hubungan ekuivalensi daerah ideal utama dan daerah Dedekind. Dengan adanya keterkaitan daerah ideal utama dan daerah faktorisasi tunggal serta daerah ideal utama dan daerah Dedekind, mengarahkan para peneliti bagaimana hubungan ekuivalensi daerah faktorisasi tunggal dan daerah Dedekind.

Dalam penelitian mengenai hubungan ekuivalensi antara daerah ideal utama dan daerah Dedekind, daerah faktorisasi tunggal dan daerah Dedekind memiliki kemungkinan tidak berlaku. Apabila dugaan tersebut terjadi, hal yang harus ditunjukkan ketika suatu hubungan ekuivalensi antara dua struktur aljabar tidak berlaku adalah dengan mencari contoh penyangkalnya. Secara garis besar, penelitian yang diusulkan ini adalah menghubungkan antara daerah Dedekind dan daerah ideal utama. Karena adanya hubungan antara daerah ideal ideal utama dan daerah faktorisasi tunggal, maka dilanjutkan bagaimana hubungan antara daerah Dedekind dan daerah faktorisasi tunggal.

2. METODE PENELITIAN

Dalam penelitian ini, definisi daerah ideal utama yang digunakan adalah daerah integral yang setiap ideal di dalamnya merupakan ideal utama. Selain itu, yang dimaksud, daerah faktorisasi tunggal adalah daerah integral yang memenuhi dua aksioma, yaitu setiap $p \in D - \{0\}$ bukan unit dapat dinyatakan sebagai hasil kali sejumlah berhingga elemen iredusibel dan jika $p_1, p_2, \ldots, p_r$ dan $q_1, q_2, \ldots, q_s$ dua macam faktorisasi dari suatu elemen $p \in D$ dengan p_i, q_i elemen iredusibel maka $r = s$, dan apabila perlu dengan mengubah urutan, diperoleh p_i berasosiasi dengan q_i. Pembahasan mengenai daerah ideal utama dan daerah faktorisasi tunggal dapat diperoleh diantaranya dalam buku Hungerford [5].

Hungerford [5] dalam bukunya menyatakan bahwa setiap daerah ideal utama merupakan daerah faktorisasi tunggal. Sifat ini tidak berlaku sebaliknya dengan memberikan contoh penyangkal.
Berikut teorema yang menjelaskan hubungan daerah ideal utama dan daerah faktorisasi tunggal dalam buku Hungerford [5].

Teorema 1
Setiap daerah ideal utama merupakan daerah faktorisasi tunggal.

Hungerford juga memberikan contoh penyangkal bahwa tidak setiap daerah faktorisasi tunggal merupakan daerah ideal utama. Dalam hal ini, peneliti telah membahas dalam penelitiannya yang merupakan topik ketika menempuh program sarjana.

Dalam perkembangannya, Stein [11] memberikan definisi daerah Dedekind bahwa daerah integral yang mempunyai karakteristik gelanggang Noetherian, tertutup secara integral dalam lapangan hasil baginya, dan setiap ideal prima tak nol di dalamnya merupakan ideal maksimal. Dengan menggunakan definisi yang diusulkan Stein [11], terlihat hubungan antara daerah ideal utama dan daerah Dedekind.

Teorema 2
Setiap daerah ideal utama merupakan daerah Dedekind.

Hubungan sebaliknya Teorema 2 yang dikemukakan dalam buku Ghorpade [4] memberikan contoh penyangkal yang membuktikan bahwa dugaan hubungan ekuivalensi antara daerah ideal utama dan daerah Dedekind tidak berlaku.

Begitu pula hubungan antara daerah Dedekind dan daerah faktorisasi tunggal apakah terjadi hubungan ekuivalensi di antara keduanya. Dalam buku Bosman [1] telah memberikan contoh penyangkal dugaan hubungan ekuivalensi tidak berlaku.

Dari hasil penelitian sebelumnya, telah dibuktikan bahwa hubungan ekuivalensi antara daerah ideal utama dan daerah faktorisasi tunggal tidak berlaku. Dalam Osserman [8], Chow [3], Milne [6] dan Bosman [2] memberikan syarat cukup agar hubungan ekuivalensi darah ideal utama dan daerah faktorisasi tunggal dapat berlaku.

Proposisi 3 [5]
Diberikan D daerah Dedekind. D daerah ideal utama jika dan hanya jika daerah faktorisasi tunggal.

Di dalam buku Milne [6] juga memberikan syarat cukup agar hubungan ekuivalensi antara daerah Dedekind dan daerah ideal utama berlaku.

Lemma 4 [6]
Diberikan D daerah Dedekind dengan beberapa ideal maksimal berhingga. D merupakan daerah Dedekind jika dan hanya jika D merupakan daerah ideal utama.

Berdasarkan Proposisi 3 dan Lemma 4, karena belum dibahas syarat cukup dugaan hubungan ekuivalensi daerah Dedekind dan daerah faktorisasi tunggal, maka diteliti syarat cukup yang diberikan agar hubungan ekuivalensi antara daerah Dedekind dan daerah faktorisasi tunggal dapat berlaku.

3. DASAR TEORI

Proposisi 3.1 [5]
Jika D adalah daerah ideal utama, maka setiap ideal prima tak nol I adalah ideal maks]mal.

Proposisi 3.2 [5]
Setiap daerah ideal utama D merupakan gelanggang Noetherian.

Definisi 3.3 [6]
Daerah integral R dikatakan tertutup secara integral di dalam lapangan hasil bagi S, jika untuk setiap α di dalam lapangan hasil bagi S dan α merupakan akar dari polinomial monik $f \in □[x]$ maka $\alpha \in □$, sehingga □ tertutup secara integral dalam lapangan hasil bagi □.

Proposisi 3.4[5]
Diberikan D daerah integral dan D adalah lapangan hasil bagi dari D. Jika D daerah faktorisasi tunggal maka D tertutup secara integral. Jika D daerah ideal utama maka D tertutup secara integral.

Definisi 3.5 [11]
Daerah integral D disebut daerah Dedekind (Dedekind domain) jika gelanggang Noetherian, tertutup secara integral dalam lapangan hasil baginya, dan ideal prima tak nol dari D merupakan ideal maksimal.

Proposisi 3.6 [11]
Setiap daerah ideal utama D merupakan daerah Dedekind.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Hubungan Antara Daerah Ideal Utama Dan Daerah Dedekind

Definisi 4.1 [5]
Diberikan K merupakan lapangan perluasan dari □. Elemen $\alpha \in K$ disebut bilangan bulat aljabar (algebraic integer) jika α integral atas □, yaitu jika α merupakan akar dari suatu polinomial monik dengan koefisien dalam □.

Proposisi 4.2 [5]
Himpunan $\overline{□}$ yang memuat semua bilangan bulat aljabar merupakan gelanggang, yaitu penjumlahan dan pergandaan dua bilangan bulat aljabar juga merupakan bilangan bulat aljabar.

Definisi 4.3 [5]
Diberikan K lapangan perluasan dari □. Lapangan K dikatakan number field jika K merupakan lapangan perluasan dari □ dengan derajat berhingga.

Definisi 4.4 [6]
Gelanggang bilangan bulat (ring of integer) dari number field K adalah gelanggang yang terdiri dari elemen - elemen yang merupakan irisan dari K dan $\overline{\mathbb{Z}}$, dinotasikan sebagai berikut :

$$O_K = K \cap \overline{\mathbb{Z}} = \{x \in K \mid x \text{ adalah bilangan aljabar}\}$$

Sebagai contoh, lapangan $\mathbb{Q}$ merupakan number field dengan derajat 1. Gelanggang bilangan bulat dari $\mathbb{Q}$ adalah $\mathbb{Z}$.

Definisi 4.5[5]
Bilangan bulat d dinamakan square - free integer, jika untuk setiap bilangan prima p sedemikian sehingga p^2 tidak membagi habis d.

Apabila diberikan d square - free integer, maka $\sqrt{d}$ merupakan bilangan bulat aljabar karena $\sqrt{d}$ merupakan akar dari polinomial monik $x^2 - d$ dengan koefisien dalam $\mathbb{Z}$. Lebih lanjut, minimal polinomial dari $\sqrt{d}$ adalah $x^2 - d$, yang mempunyai akar $\pm\sqrt{d}$.

Biasanya, bilangan bulat aljabar dalam $\mathbb{Q}\sqrt{d}$ dinamakan bilangan bulat kuadratik. Berikut akan diberikan definisi bilangan bulat kuadratik beserta contohnya.

Definisi 4.6 [5]
Diberikan lapangan $\mathbb{Q}\sqrt{d}$ dengan d square - free integer. Elemen $\alpha \in \mathbb{Q}\sqrt{d}$ dinamakan bilangan bulat kuadratik (quadratic integer), jika $\alpha = r + s\sqrt{d}$ dengan $r, s \in \mathbb{Z}$ merupakan bilangan bulat aljabar dalam lapangan $\mathbb{Q}\sqrt{d}$.

Contoh 4.7 [5]
Dalam $\mathbb{Q}\sqrt{-5}$, $1+\sqrt{-5}$ adalah bilangan bulat kuadratik karena $1+\sqrt{-5}$ merupakan akar dari suatu polinomial monik $x^2 - 2x + 6 = 0$ dengan koefisien dalam $\mathbb{Z}$.

Teorema 4.8 [5]
Diberikan $\mathbb{Q}\sqrt{d}$ lapangan perluasan berhingga dari $\mathbb{Q}$ dengan d square - free integer. Dalam hal ini, $d \neq 0 \bmod 4$. Jika $d \equiv 2 \bmod 4$ atau $d \equiv 3 \bmod 4$ maka $O_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = \mathbb{Z}(\sqrt{d})$.

Lemma 4.9 [1]
Jika K merupakan number field maka gelanggang O_K tertutup secara integral.

Proposisi 4.10 [1]
Diberikan gelanggang bilangan bulat O_K. Ideal prima tak nol dari O_K merupakan ideal maksimal.

Proposisi 4.11 [1]
Jika O_K merupakan gelanggang number (number ring) dan I ideal tak nol dalam O_K, maka gelanggang hasil bagi O_K / I berhingga.

Akibat 4,12 [1]
Gelanggang bilangan bulat O_K merupakan gelanggang Noetherian.

Proposisi 4.13[1,5]
Gelanggang $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ bukan merupakan daerah ideal utama.

Berdasarkan Proposisi 3.6, setiap daerah ideal utama merupakan daerah Dedekind. Namun sebaliknya tidak berlaku. Contoh penyangkalnya adalah $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$. Berdasarkan Teorema 4.8, $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ merupakan O_K, Padahal O_K merupakan daerah Dedekind. Namun, Proposisi 4.13 menunjukkan bahwa $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ bukan daerah ideal utama.

4.2. Hubungan Antara Daerah Faktorisasi Tunggal dan Daerah Dedekind

Hubungan selanjutnya yang akan dipaparkan adalah antara daerah faktorisasi tunggal dengan gelanggang Dedekind. $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ bukan merupakan daerah faktorisasi tunggal, karena faktorisasi suatu elemen dalam $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ tidaklah tunggal.Hal ini berarti elemen dalam $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ dapat dinyatakan lebih dari satu faktorisasi elemen - elemen tak tereduksi, namun elemen tak tereduksi tersebut tidaklah saling berasosiasi.

Salah satu contoh gelanggang bilangan bulat adalah $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$. Demikian demikian, himpunan $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ merupakan salah satu contoh daerah Dedekind. Jadi contoh penyangkal bahwa ada daerah Dedekind yang bukan merupakan daerah faktorisasi tunggal adalah $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$.

Himpunan $\mathbb{Z}[x.y]$ merupakan daerah faktorisasi tunggal, tetapi bukan merupakan daerah ideal utama. Pada proposisi sebelumnya, telah dijelaskan bahwa setiap daerah ideal utama merupakan daerah Dedekind. Karena $\mathbb{Z}[x.y]$ bukan merupakan daerah ideal utama, maka $\mathbb{Z}[x.y]$ bukan daerah Dedekind. Dengan demikian, jika D merupakan daerah faktorisasi tunggal, maka belum tentu D merupakan daerah Dedekind.

4.3. Syarat Cukup Hubungan Ekuivalensi Antara Daerah Ideal Utama, Daerah Faktorisasi Tunggal, dan Daerah Dedekind

Proposisi 6.1 [2,3,6,8]
Diberikan D merupakan daerah Dedekind. D merupakan daerah ideal utama jika dan hanya jika D daerah faktorisasi tunggal.

Proposisi 6.2 [6]
Diberikan D daerah integral dengan hanya memiliki beberapa ideal prima yang berhingga, maka D merupakan daerah Dedekind jika dan hanya jika D daerah ideal utama.

Berdasarkan Proposisi 6.1 dan Proposisi 6.2, dapat ditunjukkan bahwa daerah Dedekind merupakan daerah faktorisasi tunggal jika memenuhi suatu syarat cukup, sebagaimana dijelaskan dalam akibat berikut :

Akibat 6.3
Jika D daerah Dedekind dengan hanya memiliki beberapa ideal prima yang berhingga, maka D merupakan daerah faktorisasi tunggal.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Secara garis besar, di dalam penelitian ini dapat disimpulkan bahwa

1. Tidak berlaku hubungan ekuivalensi daerah ideal utama dan daerah Dedekind.
2. Tidak berlaku hubungan ekuivalensi antara daerah faktorisasi tunggal dan daerah Dedekind.
3. Adanya syarat cukup bahwa daerah faktorisasi tunggal merupakan daerah Dedekind mengakibatkan hubungan ekuivalensi daerah faktorisasi tunggal dan daerah ideal utama.
4. Adanya syarat cukup daerah Dedekind memiliki beberapa ideal prima yang berhingga mengakibatkan hubungan ekuivalensi daerah Dedekind dan daerah ideal utama.
5. Penulis mengaitkan kesimpulan nomor 3 dan 4 sehingga diperoleh akibat bahwa adanya syarat cukup ketika daerah Dedekind D memiliki beberapa ideal prima yang berhingga maka D merupakan daerah faktorisasi tunggal.

5.2. Saran

Dalam penelitian selanjutnya, diteliti syarat cukup agar jika D merupakan daerah faktorisasi tunggal maka D merupakan daerah Dedekind.

6. REFERENSI

Baker, M., 2006, *Algebraic Number Theory Course Notes (Fall 2006)*, Georgia Institute of Thechnology, Atlanta, USA

Bosman, Johan, 2011, Algebraic Number Theory, Bounyer

Chow, Sam, 2011, Thesis : An Introduction ri Algebraic Number Theory, and the Class Number Formula, University of Melbourne, Australia

Ghorpade, S. R., 2002, Lecture on Topics in Algebraic Number Theory, Indian Institute of Technology Bombay, India

Hungerford, T.W., 1996, Abstract Algebra : An Introduction, Saunders College Publishing

Milne, J.S., 2009, Algebraic Number Theory, New Zealand

Murty, R., 2004, *Problem in Algebraic* Number Theory : Second Edition, Springer

Osserman, B., 2011, Algebraic Number Theory, Bouyer

Salustri, F.,2011, Generalized Dedekind Domain, Universita Degli Studi

Stein, W., 2005, Introduction to Algebraic Number Theory, William Stein

Stein W., 2012, Algebraic Number Theory, A Computational Approach, William Stein